



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Les modèles d'analyse de la variance à un  
ou deux facteurs avec effets aléatoires :*  
**MINQUE = ANOVA**

Christian LAVERGNE

N° 2484  
Février 1995

PROGRAMME 5

*R*apport  
*de recherche*

Les rapports de recherche de l'INRIA  
sont disponibles en format postscript sous  
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

si vous n'avez pas d'accès ftp  
la forme papier peut être commandée par mail :  
e-mail : dif.gesdif@inria.fr  
(n'oubliez pas de mentionner votre adresse postale).

par courrier :  
Centre de Diffusion  
INRIA  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

INRIA research reports  
are available in postscript format  
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

if you haven't access by ftp  
we recommend ordering them by e-mail :  
e-mail : dif.gesdif@inria.fr  
(don't forget to mention your postal address).

by mail :  
Centre de Diffusion  
INRIA  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

# Les modèles d'analyse de la variance à un ou deux facteurs avec effets aléatoires : MINQUE = ANOVA

Christian LAVERGNE

*IMAG - Laboratoire de Modélisation et Calcul,  
INRIA Rhône-Alpes.*

**Résumé :** l'objet de cet article est l'étude des modèles d'analyse de la variance à au plus deux facteurs à effets aléatoires pour des plans équilibrés. Plus particulièrement, nous nous intéressons à l'estimation des composantes de la variance. Les modèles sont regroupés dans un ensemble de deux familles. Pour chacune d'elles, on résout le système linéaire issu de la procédure MINQUE et on retrouve les estimateurs appelés communément estimateurs ANOVA.

**Mots-clés :** *Modèles linéaires mixtes. Composantes de la variance. Analyse de la variance à effets aléatoires sur plans équilibrés. Estimateurs MINQUE et ANOVA.*

## Random effects in analysis of variance : MINQUE = ANOVA

**Abstract:** in this paper we study random effects models and mixed models for the 1-way and 2-way crossed and nested classification, with balanced data. We introduce two model families and derive estimators of variance components with the MINQUE method. The obtained estimators are the same as the ANOVA estimators.

**Keywords:** *Mixed linear model. Variance components. The 1-way and 2-way crossed and nested classification. Balanced data. MINQUE and ANOVA estimators.*

### 1 Introduction

Les modèles d'analyse de la variance à effets aléatoires font partie de la théorie plus générale des modèles linéaires à composantes de la variance. Une littérature abondante existe sur ce domaine : outre les ouvrages classiques sur le modèle linéaire comme par

exemple Rao, [7] ou Scheffé, [8] citons par exemple deux ouvrages récents exclusivement consacrés à ces modèles : Kleffe and Rao, [3] et Searle, Casella, and McCulloch, [9].

Le modèle général à  $K$  composantes de la variance s'écrit :

$$Y = A\theta + U_1\xi_1 + \dots + U_k\xi_k$$

où :

$Y$  est le vecteur des observations de taille  $n$ ,

$A$  est une matrice connue de dimensions  $n \times p$  ( $p < n$ ) et de rang  $p$ ,

$\theta$  est un vecteur inconnu de  $\mathbb{R}^p$ ,

$(U_j)_{j=1,\dots,K}$  sont des matrices connues de dimensions  $n \times q_j$ ,

$(\xi_j)_{j=1,\dots,K}$  sont des vecteurs aléatoires non observés de  $\mathbb{R}^{q_j}$ , et non corrélés deux à deux ; chaque  $\xi_j$  étant un vecteur centré, de variance  $\sigma_j^2 \mathcal{I}_{d_{q_j}}$ , (la matrice  $\mathcal{I}_{d_q}$  représentant la matrice identité de  $\mathbb{R}^q$ ). Les  $\sigma_j^2$  sont des paramètres réels inconnus ; on note  $\underline{\sigma}^2$  le vecteur de  $\mathbb{R}^k$  de composantes  $(\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2)$  ;

On peut donc écrire la variance du vecteur  $Y$  sous la forme :

$$\text{var}(Y) = \sum_{j=1}^K U_j \text{var}(\xi_j) U_j^t = \sum_{j=1}^K \sigma_j^2 V_j = \Gamma ; V_j = U_j U_j^t$$

## 1.1 Estimation du paramètre $\theta$

Si l'on s'intéresse à l'estimation du paramètre  $\theta$ , il est naturel de proposer la famille d'estimateurs  $\hat{\theta}_N$  suivante ;  $N$  étant une matrice carrée de  $\mathbb{R}^n$ , symétrique et définie positive :

$$\hat{\theta}_N = ({}^tANA)^{-1} {}^tANY.$$

L'estimateur  $\hat{\theta}_N$  est nommé classiquement "estimateur des moindres carrés généralisés".

On peut alors proposer diverses solutions pour le choix de la métrique  $N$  : parmi elles, une serait de choisir  $N = \mathcal{I}_{d_n}$ . L'estimateur  $\hat{\theta}_{\mathcal{I}_{d_n}}$  est appelé "estimateur des moindres carrés" ; ce qui en général n'est pas le choix optimal. En effet, il est bien connu que le meilleur choix pour la matrice  $N$  est celui de l'inverse de la matrice de variance de  $Y$  :  $\Gamma^{-1}$ . On appelle alors  $\hat{\theta}_{\Gamma^{-1}}$  "l'estimateur de Gauss-Markov" de  $\theta$  ; c'est l'estimateur linéaire et sans biais de  $\theta$  de variance minimale.

Or dans le cas des modèles linéaires à composantes de la variance, la matrice  $\Gamma$  est inconnue. La situation suivante est alors à examiner :

*Le choix de  $\hat{\theta}_{\mathcal{I}_{d_n}}$  est optimal : il est équivalent à "l'estimateur de Gauss-Markov"  $\hat{\theta}_{\Gamma^{-1}}$ .*

En effet, on connaît (voir [4]) une condition nécessaire et suffisante pour laquelle  $\hat{\theta}_{\mathcal{I}_{d_n}} = \hat{\theta}_{\Gamma^{-1}}$ . Cette condition est que la matrice  $\Gamma$ , considéré comme opérateur linéaire de  $\mathbb{R}^n$ , laisse invariant l'espace engendré par les colonnes de la matrice  $A$ . Nous verrons par la suite un exemple d'utilisation de cette propriété dans le cas des modèles d'analyse de la variance à effet aléatoire sur des plans équilibrés.

Dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée, il est naturel de proposer  $\hat{\theta}_{\hat{\Gamma}^{-1}}$ , où  $\hat{\Gamma}^{-1}$  est obtenu en remplaçant les valeurs des paramètres inconnus  $\sigma_j^2$  par leur estimation.

## 1.2 Estimation des paramètres $\sigma_j^2$

Nous ne citons ici qu'une seule procédure d'estimation, qui est la résolution du système linéaire de  $\mathbb{R}^k$  suivant :

$$S_{\Gamma^{-1}} \underline{\sigma}^2 = Q_{\Gamma^{-1}} \quad (1)$$

$S_{\Gamma^{-1}}$  étant la matrice de terme générique  $\text{trace}(R_{\Gamma^{-1}} V_j R_{\Gamma^{-1}} V_{j'})$  pour  $j, j' = 1, \dots, k$ ,  $Q_{\Gamma^{-1}}$  le vecteur de terme générique  ${}^t Y R_{\Gamma^{-1}} V_j R_{\Gamma^{-1}} Y$  pour  $j = 1, \dots, k$  ; où  $R_{\Gamma^{-1}}$  est la matrice définie par :  $\Gamma^{-1}(\mathcal{I}d_n - A({}^t A \Gamma^{-1} A)^{-1} {}^t A \Gamma^{-1})$ . Nous présenterons le système (1) sous l'écriture :

$$[\text{trace}(R_{\Gamma^{-1}} V_j R_{\Gamma^{-1}} V_{j'})]_{(j,j'=1,\dots,k)} \underline{\sigma}^2 = [{}^t Y R_{\Gamma^{-1}} V_j R_{\Gamma^{-1}} Y]_{(j=1,\dots,k)} \quad (2)$$

Ce système peut être vu comme issu de la procédure MINQUE (Minimum Invariant Norm Quadratic Unbiased Estimator, voir [7]) où l'auteur propose de remplacer la matrice  $\Gamma$  par  $\tilde{\Gamma} = \sum_{j=1}^K \alpha_j^2 V_j$ , les  $\alpha_j^2$  étant appelés valeur a priori.

En notant  $R_{\tilde{\Gamma}^{-1}} = \tilde{\Gamma}^{-1}(\mathcal{I}d_n - A({}^t A \tilde{\Gamma}^{-1} A)^{-1} {}^t A \tilde{\Gamma}^{-1})$ , le système "MINQUE" introduit par C.R. Rao ([7]) est donc le suivant :

$$[\text{trace}(R_{\tilde{\Gamma}^{-1}} V_j R_{\tilde{\Gamma}^{-1}} V_{j'})]_{(j,j'=1,\dots,k)} \underline{\sigma}^2 = [{}^t Y R_{\tilde{\Gamma}^{-1}} V_j R_{\tilde{\Gamma}^{-1}} Y]_{(j=1,\dots,k)} \quad (3)$$

Dans la pratique cette procédure d'estimation sera alors itérative, puisque on réinjecte à chaque étape les valeurs de l'estimation des  $\sigma_j^2$ . On l'appelle naturellement le MINQUE itéré ou I-MINQUE. On peut aussi voir le système (2) comme issu de la procédure REML (maximum de vraisemblance restreinte) sous l'hypothèse de normalité de chacun des effets aléatoires : les solutions du REML sont alors égales à l'estimateur I-MINQUE ; voir par exemple Searle et al., ([9] page 253 ou 398). L'algorithme de résolution fréquemment utilisé sera l'algorithme EM (Expectation-Maximisation) : cette procédure a la propriété de donner des estimations positives des paramètres  $\sigma_j^2$ . La section 8.3 du chapitre 8 de [9] est entièrement consacré à la description de cet algorithme.

On peut d'autre part faire les deux remarques a posteriori suivantes :

i) Il est clair que les estimateurs obtenus par la résolution du système linéaire (2) sont des estimateurs sans biais. En effet, on sait que pour  $(j = 1, \dots, k)$  :

$$E[{}^t Y R_{\Gamma^{-1}} V_j R_{\Gamma^{-1}} Y] = \sum_{j'=1}^K [\text{trace}(R_{\Gamma^{-1}} V_j R_{\Gamma^{-1}} V_{j'})] \sigma_{j'}^2.$$

ii) La matrice  $R_{\Gamma^{-1}}$  n'est autre que la matrice telle que  ${}^t Y R_{\Gamma^{-1}} Y = \|Y - A\hat{\theta}_{\Gamma^{-1}}\|_{\Gamma^{-1}}^2$ . Il est donc relativement naturel qu'une procédure permettant l'estimation des paramètres de la variance introduise cette matrice  $R_{\Gamma^{-1}}$ .

### 1.3 MINQUE et Analyse de la variance

Que devient le système (1) dans le cas des modèles d'analyse de la variance à effet aléatoire ? C'est ce que nous nous proposons d'analyser. On introduit tout d'abord deux familles de modèles qui permettent de regrouper l'ensemble de tous les modèles d'analyse de la variance à au plus deux facteurs à effet aléatoire. Nous vérifions alors dans un premier temps que seul le cas des plans équilibrés permet de résoudre le système (2) de façon explicite. Dans un second temps et toujours dans le cas des plans équilibrés, on donne les expressions des estimateurs des composantes de la variance par résolution de ce système. Ces expressions sont classiques et appelées usuellement estimateurs ANOVA, lesquels sont introduits par des méthodes de moments. On peut les trouver en partie dans [9] ; mais l'auteur ne montre jamais l'équivalence des estimateurs MINQUE et des estimateurs ANOVA. Dans ce qui suit, on ne propose donc pas de nouveaux estimateurs ; mais la démarche s'avère posséder les intérêts suivants :

i) On montre de manière exhaustive que les estimateurs appelés estimateurs ANOVA dans la littérature sont MINQUE dans le cas de plans équilibrés.

ii) Inversement dans le cas de plans non équilibrés il paraît préférable de ne pas utiliser les estimateurs ANOVA mais plutôt d'utiliser la procédure MINQUE qui devient alors itérative. Les estimations ANOVA pourront toutefois être prises comme valeur a priori lors de la première itération de la procédure MINQUE.

iii) La résolution explicite du système MINQUE (1) permet d'obtenir facilement (avec sûreté et presque de façon mécanique) les expressions des estimateurs ; alors qu'une méthode des moments pourra s'avérer hasardeuse dans certaines situations.

iv) La démarche pourra être utilisée sans grande difficulté pour des modèles d'analyse de la variance avec effet aléatoire à trois facteurs ou plus.

## 2 L'analyse de la variance à effet aléatoire : les modèles

Nous nous proposons d'étudier précisément ici le cas des modèles d'analyse de la variance avec un ou plusieurs effets aléatoires, en se limitant à au plus deux facteurs.

### 2.1 Les modèles d'ANOVA à au plus deux facteurs, avec effet aléatoire

Dans un premier temps, on donne une énumération exhaustive des modèles étudiés. On utilise les notations suivantes :

- Les indices possibles sont :  $i = 1, \dots, I$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ ,  $k = 1, \dots, n_{ij}$

- Le nombre total d'individus observés est  $n = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} n_{ij}$ .

On pose d'autre part :  $C = \sum_{i=1}^I n_i$  et  $J = \frac{C}{I}$ .

- Les effets fixes possibles (paramètres inconnus) sont :

$\mu$  : paramètre réel

$\underline{a}$  paramètre de  $\mathbb{R}^I$  de composantes  $a_i$ .

- Les effets aléatoires possibles sont :

$\alpha$  : vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^I$  centré, de variance  $\sigma_1^2 \mathcal{I}d_I$  de composantes  $\alpha_i$ .

$\beta$  : vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^J$  centré, de variance  $\sigma_2^2 \mathcal{I}d_J$  de composantes  $\beta_j$ .

$\gamma$  : vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^C$  centré, de variance  $\sigma_3^2 \mathcal{I}d_C$  de composantes  $\gamma_{ij}$ .

- $\varepsilon$  vecteur aléatoire des erreurs ; vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^n$  centré, de variance  $\sigma^2 \mathcal{I}d_n$  de composantes  $e_{ijk}$  (ou  $e_{ik}$  dans le cas  $n_i = 1$ ).

- Le vecteur des observations sera noté  $\mathbf{Y}$  ; de composantes  $y_{ijk}$  (ou  $y_{ik}$  dans le cas  $n_i = 1$ ).

Les modèles étudiés seront :

**Modèle 1** : modèle d'analyse de la variance à un facteur aléatoire ;

$$y_{ik} = \mu + \alpha_i + e_{ik}$$

avec par convention  $n_i = 1$ ,  $n_{ij} = \tilde{n}_i$  et  $n = \sum_{i=1}^I \tilde{n}_i$ .

**Modèle 2** : modèle d'analyse de la variance à deux facteurs aléatoires emboîtés ;

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \gamma_{ij} + e_{ijk}.$$

**Modèle 3** : modèle d'analyse de la variance à deux facteurs aléatoires croisés, sans interaction ;

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk},$$

dans ce cas  $n_i = J$  pour tout  $i$  et  $C = IJ$ .

**Modèle 4** : modèle d'analyse de la variance à deux facteurs aléatoires croisés, avec interaction ;

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk},$$

comme dans le modèle 3 :  $n_i = J$  pour tout  $i$  et  $C = IJ$ .

**Modèle 5** : modèle d'analyse de la variance à un facteur à effet fixe : ce modèle n'est évidemment pas un modèle à effet aléatoire ; on le mentionne ici pour garder l'analogie avec le modèle 1 ;

$$y_{ik} = a_i + e_{ik}$$

avec les mêmes conventions que pour le modèle 1.

**Modèle 6** : modèle mixte d'analyse de la variance à deux facteurs emboîtés ;

$$y_{ijk} = a_i + \gamma_{ij} + e_{ijk}.$$

**Modèle 7** : modèle mixte d'analyse de la variance à deux facteurs croisés, sans interaction ;

$$y_{ijk} = a_i + \beta_j + e_{ijk},$$

dans ce cas  $n_i = J$  pour tout  $i$  et  $C = IJ$ .

**Modèle 8** : modèle mixte d'analyse de la variance à deux facteurs croisés, avec interaction ;

$$y_{ijk} = a_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk},$$

dans ce cas  $n_i = J$  pour tout  $i$  et  $C = IJ$ .

## 2.2 Plans équilibrés : écriture matricielle des modèles

On introduit tout d'abord les notations matricielles suivantes :

- $\mathbf{1}_p$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^p$  dont toutes les composantes sont égales à 1.
- $\mathbf{1}_p^q = \mathbf{1}_p {}^t \mathbf{1}_q$  est donc la matrice de dimension  $p \times q$  dont tous les éléments sont égaux à 1.
- $\mathbf{U}_p^q$  est une matrice (de dimension  $p \cdot q \times q$ ) diagonale par blocs ; chacun des  $q$  blocs étant égal à  $\mathbf{1}_p$ , que l'on notera  $\mathbf{U}_p^q = \text{Diag}_q(\mathbf{1}_p)$ . On peut remarquer que  $\mathcal{I}d_q = \mathbf{U}_1^q$ .
- $\mathbf{U}_{p,l}^q$  est une matrice (de dimension  $(p \cdot q \cdot l) \times q$ ) formée de  $l$  lignes, chaque ligne étant égale à  $\mathbf{U}_p^q$ . On a entre autre :  $\mathbf{U}_p^q = \mathbf{U}_{p,1}^q$  et  $\mathbf{U}_{1,l}^1 = \mathbf{1}_l$ .

- $\mathbf{V}_{p;l}^q = \mathbf{U}_{p;l}^q {}^t\mathbf{U}_{p;l}^q$  : matrice de dimension  $p.q.l \times p.q.l$ . On peut écrire  $\mathbf{V}_p^q = \mathbf{V}_{p;1}^q = \text{Diag}_q(\mathbf{1}_p^p)$ .

On propose alors de regrouper les modèles énumérés précédemment au sein de deux familles de modèles : les modèles 1, 2, 3 et 4 forment la famille notée  $\mathbf{F}_0$  ; les modèles 5, 6, 7 et 8, la famille notée  $\mathbf{F}_1$ .

En effet, à l'aide des notations matricielles introduites, lorsque l'on se trouve dans le cas d'un plan équilibré ( $n_i = J$  et  $n_{ij} = K, \forall i, j$ ), chacune des deux familles admet une seule écriture matricielle : il suffit pour cela de considérer que les deux paramètres  $\sigma_2^2$  et  $\sigma_3^2$  peuvent prendre la valeur 0. Cette hypothèse étant, les écritures matricielles des modèles sont donc les suivantes :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{1}_n \mu + \mathbf{U}_{JK}^I \alpha + \mathbf{U}_{K;I}^J \beta + \mathbf{U}_K^{IJ} \gamma + \varepsilon \quad (\mathbf{F}_0)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}_{JK}^I \underline{a} + \mathbf{U}_{K;I}^J \beta + \mathbf{U}_K^{IJ} \gamma + \varepsilon. \quad (\mathbf{F}_1)$$

Par exemple pour la famille  $\mathbf{F}_0$ , le modèle (3) a pour écriture matricielle  $\mathbf{Y} = \mathbf{1}_n \mu + \mathbf{U}_{JK}^I \alpha + \mathbf{U}_{K;I}^J \beta + \varepsilon$ , le modèle (2)  $\mathbf{Y} = \mathbf{1}_n \mu + \mathbf{U}_{JK}^I \alpha + \mathbf{U}_K^{IJ} \gamma + \varepsilon$  et le modèle (1)  $\mathbf{Y} = \mathbf{1}_n \mu + \mathbf{U}_K^I \alpha + \varepsilon$  (ici  $J = 1$ ).

## 2.3 Plans équilibrés : estimation des effets fixes

Avant d'étudier le système (2) présenté dans l'introduction, il faut d'abord s'assurer que les estimateurs Gauss-Markov des effets fixes ( $\mu$  et  $\underline{a}$ ) sont indépendants du vecteur  $\underline{\sigma}^2$ . Pour cela, il suffit d'une part (à l'aide des résultats matriciels cités en annexe) de noter les produits matriciels suivants :

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_{JK}^I, \mathbf{V}_{K;I}^J, \mathbf{V}_K^{IJ}) * \mathbf{1}_n &= (JK\mathbf{1}_n, IK\mathbf{1}_n, K\mathbf{1}_n) \\ (\mathbf{V}_{JK}^I, \mathbf{V}_{K;I}^J, \mathbf{V}_K^{IJ}) * \mathbf{U}_{JK}^I &= (JK\mathbf{U}_{JK}^I, K\mathbf{1}_n, K\mathbf{U}_{JK}^I) \end{aligned} \quad (4)$$

D'autre part, si  $\Gamma_{(\cdot)}$  représente la matrice de variance de la famille de modèles considérée, alors pour la famille  $\mathbf{F}_0$  on a :

$$\Gamma_{(0)} \mathbf{1}_n = (JK\sigma_1^2 + IK\sigma_2^2 + K\sigma_3^2 + \sigma^2) \mathbf{1}_n \quad (5)$$

et pour la famille  $\mathbf{F}_1$  :

$$\Gamma_{(1)} \mathbf{U}_{JK}^I = K\sigma_2^2 \mathbf{1}_n + (K\sigma_3^2 + \sigma^2) \mathbf{U}_{JK}^I \quad (6)$$

Remarquant que le vecteur  $\mathbf{1}_n$  est égal à la somme des colonnes de la matrice  $\mathbf{U}_{JK}^I$ , la condition de Kruskal (déjà citée en introduction) que la matrice de variance laisse invariant l'espace engendré par  $\mathbf{1}_n$  pour la famille  $\mathbf{F}_0$  ou  $\mathbf{U}_{JK}^I$  pour la famille  $\mathbf{F}_1$  est donc bien vérifiée quel que soit le modèle.

Cette propriété traduit le fait que dans le cas de plans équilibrés les estimateurs optimaux (au sens de la variance) de  $\mu$  et  $\underline{a}$  sont les estimateurs moindres carrés élémentaires :

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{...} = \frac{1}{n} \sum_{ijk} y_{ijk} \text{ et } \hat{a}_i = \bar{y}_{i..} = \frac{1}{JK} \sum_{jk} y_{ijk}, \text{ pour } i = 1, \dots, I.$$

C'est un résultat très classique. Mais la condition de Kruskal est une condition nécessaire et suffisante et de plus, il est immédiat de vérifier que les égalités (5) et (6) ne sont vraies



que dans le cas de plans équilibrés. Ceci traduit donc le fait que dans le cas de plans non équilibrés les estimateurs moindres carrés ne sont pas des estimateurs optimaux au sens de Gauss-Markov et que dans ce cas il faut préconiser une solution itérative issue du système (2).

### 3 Plans équilibrés : estimation des composantes de la variance

On cherche maintenant à résoudre le système (3), " $S_{\tilde{\Gamma}^{-1}}\underline{\sigma}^2 = Q_{\tilde{\Gamma}^{-1}}$ " dans le cas de chacun des modèles des familles  $\mathbf{F}_0$  et  $\mathbf{F}_1$ . On notera tout d'abord que la matrice  $R_{\tilde{\Gamma}^{-1}}$  introduite dans ce système ( $R_{\tilde{\Gamma}^{-1}} = \tilde{\Gamma}^{-1}(\mathcal{I}d_n - A({}^t A_{(\cdot)} A_{(\cdot)})^{-1} A_{(\cdot)})$ ) a d'après les égalités précédentes (5) et (6) l'écriture simplifiée suivante :

$$R_{\tilde{\Gamma}^{-1}} = \tilde{\Gamma}^{-1}(\mathcal{I}d_n - A_{(\cdot)}({}^t A_{(\cdot)} A_{(\cdot)})^{-1} A_{(\cdot)})$$

la matrice  $A_{(\cdot)}$  prenant la valeur  $A_{(0)} = \mathbf{1}_n$  pour  $\mathbf{F}_0$  et  $A_{(1)} = \mathbf{U}_{JK}^I$  pour  $\mathbf{F}_1$ . Afin de conserver une écriture identique à celle du système (3), on notera  $V_1 = \mathbf{V}_{JK}^I$ ,  $V_2 = \mathbf{V}_{K;I}^J$ ,  $V_3 = \mathbf{V}_K^{IJ}$ ,  $V_4 = \mathcal{I}d_n$ . La matrice  $\tilde{\Gamma}$  peut donc s'écrire pour chacun des modèles  $\sum_{j=1}^4 \alpha_j^2 V_j$ , en considérant que certaines des valeurs  $\alpha_j^2$  pour  $j = 1, 2$  ou  $3$  sont nulles afin d'adapter la matrice  $\tilde{\Gamma}$  au modèle considéré. La seule condition à imposer pour que  $\Gamma^{-1}$  existe est que  $\alpha_4^2$  soit différent de 0.

A l'aide de cette convention, les estimateurs des composantes de la variance de chacun des modèles issus des familles  $\mathbf{F}_0$  et  $\mathbf{F}_1$  seront considérés être solutions du même système (3) " $S_{\tilde{\Gamma}^{-1}}\underline{\sigma}^2 = Q_{\tilde{\Gamma}^{-1}}$ " qui sera adapté à chacun des modèles en supprimant ligne(s) et colonne(s) correspondantes de la matrice  $S_{\tilde{\Gamma}^{-1}}$ , ainsi que la ou les lignes des vecteurs  $\underline{\sigma}^2$  ( $\underline{\sigma}^2 = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma^2)$ ) et  $Q_{\tilde{\Gamma}^{-1}}$ , et en choisissant convenablement la matrice  $A_{(\cdot)}$ . Le système (3) s'écrit donc :

$$[\text{trace}(R_{\tilde{\Gamma}^{-1}} V_j R_{\tilde{\Gamma}^{-1}} V_{j'})]_{(j,j'=1,\dots,4)} \underline{\sigma}^2 = [{}^t Y R_{\tilde{\Gamma}^{-1}} V_j R_{\tilde{\Gamma}^{-1}} Y]_{(j=1,\dots,4)} \quad (7)$$

**Propriété :** Si l'on note  $\pi_{A_{(\cdot)}}^\perp = (\mathcal{I}d_n - A_{(\cdot)}({}^t A_{(\cdot)} A_{(\cdot)})^{-1} A_{(\cdot)})$ , alors dans le cas des plans équilibrés le système (7) est équivalent au système :

$$[\text{trace}(\pi_{A_{(\cdot)}}^\perp V_j \pi_{A_{(\cdot)}}^\perp V_{j'})]_{(j,j'=1,\dots,4)} \underline{\sigma}^2 = [{}^t Y \pi_{A_{(\cdot)}}^\perp V_j \pi_{A_{(\cdot)}}^\perp Y]_{(j=1,\dots,4)} \quad (8)$$

Cette propriété implique donc que l'estimation MINQUE ou REML des composantes de la variance dans le cas des modèles issus des familles  $\mathbf{F}_0$  et  $\mathbf{F}_1$  est indépendante de la matrice  $\Gamma$  ou  $\tilde{\Gamma}$ , donc des valeurs à priori. En d'autres termes la matrice  $\tilde{\Gamma}^{-1}$  est remplacée par la matrice  $\mathcal{I}d_n$ . Le système (1) aura donc une résolution analytique et non itérative comme c'est le cas en général. Pour la démonstration de cette propriété nous distinguerons les deux familles  $\mathbf{F}_0$  et  $\mathbf{F}_1$ . A l'aide des résultats de calculs matriciels de l'annexe A, on peut calculer tout d'abord les produits  $V_j * V_{j'}$  ; résultats que l'on regroupe dans le tableau 1.

#### 3.1 Cas de la famille $\mathbf{F}_1$

Dans ce cas la démonstration explicite existe dans [9] page 421 et s'appuie sur le fait que l'espace des matrices engendré par  $(V_2, V_3, V_4)$  est un espace quadratique. Cette notion, introduite par Seely, [11] en 1971 est définie par le fait que si une matrice est

*	$V_1 = \mathbf{V}_{JK}^I$	$V_2 = \mathbf{V}_{K;I}^J$	$V_3 = \mathbf{V}_K^{IJ}$
$V_1$	$JKV_1$	$K\mathbf{1}_n^n$	$KV_1$
$V_2$		$IKV_2$	$KV_2$
$V_3$			$KV_3$

Tableau 1: Produit des matrices de variance

combinaison linéaire des matrices ( $V_2, V_3, V_4$ ) alors son carré aussi. Cette condition que l'on vérifie à l'aide du tableau 1, est une condition suffisante pour montrer l'équivalence des deux systèmes (7) et (8).

### 3.2 Cas de la famille $\mathcal{F}_0$

Ici, on ne se trouve pas en présence d'un espace quadratique ; en effet  $V_1 V_2 = K\mathbf{1}_n^n$  et  $\mathbf{1}_n^n$  ne peut s'écrire comme combinaison linéaire de  $V_1, V_2, V_3$  et  $V_4$ . En 1979, Searle et Henderson ([10]) proposent une méthode de calcul de l'inverse de la matrice de variance et covariance ( $\Gamma^{-1}$ ) pour un ensemble de modèles qui contient la famille  $\mathcal{F}_0$ . Bien qu'utilisant les mêmes techniques mathématiques qui sont la diagonalisation des matrices  $V_j$ , ce n'est pas notre objectif ici. Notre question est de montrer que l'on peut supprimer la matrice  $\tilde{\Gamma}^{-1}$  dans le système (7). La démonstration de l'équivalence des deux systèmes (7) et (8) est dans le cas de cette famille quelque peu technique. Elle est donnée en annexe B. On peut noter d'autre part que cette démonstration peut s'appliquer à la famille  $\mathcal{F}_1$  ; la notion d'espace quadratique n'est donc pas indispensable pour résoudre le problème posé.

## 4 Plans équilibrés : identification des estimateurs

On propose dans ce paragraphe, dans un premier temps d'identifier les termes du système (8) " $S_{Id_n} \sigma^2 = Q_{Id_n}$ ", pour chacune des deux familles  $\mathcal{F}_0$  et  $\mathcal{F}_1$ . Dans un deuxième temps on donne les expressions des estimateurs, solutions du système (8).

### 4.1 Identification du système " $S_{Id_n} \sigma^2 = Q_{Id_n}$ "

On note tout d'abord  $\pi_0 = \mathbf{1}_n({}^t\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n)^{-1}{}^t\mathbf{1}_n$  le projecteur sur le sous espace de  $\mathbb{R}^n$  engendré par le vecteur  $\mathbf{1}_n$  ; ce sous espace sera noté  $E_0^n$ . On introduit ensuite (à l'aide du tableau 1) les 3 projecteurs  $\pi_j$  pour  $j = 1, 2, 3$  :

$$\pi_1 = \frac{1}{JK}V_1 ; \pi_2 = \frac{1}{IK}V_2 ; \pi_3 = \frac{1}{K}V_3$$

projecteurs sur les sous espaces de  $\mathbb{R}^n$  (notés  $E_j^n$ ) engendrés respectivement par les colonnes des matrices  $U_1 = \mathbf{U}_{JK}^I$  ;  $U_2 = \mathbf{U}_{K;I}^J$  ;  $U_3 = \mathbf{U}_K^{IJ}$ . A l'aide de ces notations la matrice  $\pi_{A_{(0)}^\perp}$  définie lors de la présentation de la propriété précédente est égale à :

$$\pi_{A_{(0)}^\perp} = Id - \pi_0 \text{ et } \pi_{A_{(1)}^\perp} = Id - \pi_1.$$

On peut noter :

$$\text{trace}(\pi_0) = 1, \text{trace}(\pi_1) = I, \text{trace}(\pi_2) = J, \text{trace}(\pi_3) = IJ,$$

et remarquer ensuite :

$$\pi_0 \cdot \pi_j = \pi_0 \text{ et } \pi_j \cdot \pi_3 = \pi_j \text{ car } E_0^n \subset E_j^n \subset E_3^n \text{ pour tout } j,$$

$$\pi_1 \cdot \pi_2 = \pi_0 \text{ car } E_1^n \cap E_2^n = E_0^n.$$

Le tableau 2 qui donne tous les produits  $\pi_{A_{(\cdot)}^\perp} V_j$  se construit donc aisément à l'aide de ces remarques et du tableau 1.

*	$V_1 = \mathbf{V}_{JK}^I$	$V_2 = \mathbf{V}_{K;I}^J$	$V_3 = \mathbf{V}_K^{IJ}$
$\pi_{A_{(0)}^\perp}$	$JK(\pi_1 - \pi_0)$	$IK(\pi_2 - \pi_0)$	$K(\pi_3 - \pi_0)$
$\pi_{A_{(1)}^\perp}$	0	$IK(\pi_2 - \pi_0)$	$K(\pi_3 - \pi_1)$

Tableau 2: Produit des  $\pi_{A_{(\cdot)}^\perp} V_j$

Il est d'autre part immédiat de vérifier :

$$\pi_{A_{(\cdot)}^\perp} V_j \pi_{A_{(\cdot)}^\perp} = \pi_{A_{(\cdot)}^\perp} V_j$$

ainsi que toutes les égalités suivantes :

$$\pi_{A_{(0)}^\perp} V_1^2 = (JK)^2(\pi_1 - \pi_0), \quad \pi_{A_{(0)}^\perp} V_2^2 = (IK)^2(\pi_2 - \pi_0), \quad \pi_{A_{(0)}^\perp} V_3^2 = K^2(\pi_3 - \pi_0),$$

$$\pi_{A_{(1)}^\perp} V_2^2 = (IK)^2(\pi_2 - \pi_0), \quad \pi_{A_{(1)}^\perp} V_3^2 = K^2(\pi_3 - \pi_1),$$

$$\pi_{A_{(0)}^\perp} V_1 V_2 = 0, \quad \pi_{A_{(0)}^\perp} V_1 V_3 = JK^2(\pi_1 - \pi_0),$$

$$\pi_{A_{(1)}^\perp} V_2 V_3 = IK^2(\pi_2 - \pi_0).$$

A l'aide de toutes les égalités de ce paragraphe, il est maintenant aisé d'identifier chacun des termes du système (8) " $S_{Id_n} \underline{\sigma}^2 = Q_{Id_n}$ ", dont on rappelle la forme générale:

$$[\text{trace}(\pi_{A_{(\cdot)}^\perp} V_j \pi_{A_{(\cdot)}^\perp} V_{j'})]_{(j,j'=1,\dots,4)} \underline{\sigma}^2 = [{}^t Y \pi_{A_{(\cdot)}^\perp} V_j \pi_{A_{(\cdot)}^\perp} Y]_{(j=1,\dots,4)}.$$

Les termes de ce système sont différents pour chacune des deux familles ; il est donc naturel de distinguer les deux cas.

#### 4.1.1 Le système " $S_{Id_n} \underline{\sigma}^2 = Q_{Id_n}$ " pour la famille $F_0$

Après quelques simplifications élémentaires, et toujours en supposant que le système sera adapté au modèle considéré en supprimant la ou les lignes correspondantes, on obtient pour l'ensemble des modèles 1, 2, 3 et 4 :

$$\begin{pmatrix} (I-1)JK & 0 & (I-1)K & (I-1) \\ 0 & (J-1)IK & (J-1)K & (J-1) \\ (I-1)JK & (J-1)IK & K(IJ-1) & (IJ-1) \\ (I-1)JK & (J-1)IK & K(IJ-1) & n-1 \end{pmatrix} \underline{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} {}^t Y(\pi_1 - \pi_0)Y \\ {}^t Y(\pi_2 - \pi_0)Y \\ {}^t Y(\pi_3 - \pi_0)Y \\ {}^t Y(Id_n - \pi_0)Y \end{pmatrix}. \quad (9)$$

### 4.1.2 Le système “ $S_{Id_n}\underline{\sigma^2} = Q_{Id_n}$ ” pour la famille $F_1$

Avec les mêmes remarques que précédemment, les estimateurs des composantes de la variance de chacun des modèles 5, 6, 7 et 8 s'obtiennent par résolution de :

$$\begin{pmatrix} (J-1)IK & (J-1)K & (J-1) \\ (J-1)IK & (J-1)IK & (J-1)I \\ (J-1)IK & (J-1)IK & n-I \end{pmatrix} \underline{\sigma^2} = \begin{pmatrix} {}^tY(\pi_2 - \pi_0)Y \\ {}^tY(\pi_3 - \pi_1)Y \\ {}^tY(Id_n - \pi_1)Y \end{pmatrix}. \quad (10)$$

## 4.2 Ecriture des estimateurs

On introduit les écritures classiques  $SS_{(.)}$  et on rappelle leurs identifications aux formes quadratiques fonctions des projecteurs  $\pi_{(.)}$ . On rappelle aussi les notations  $MS_{(.)}$  qui correspondent aux  $SS_{(.)}$  divisés par leur degré de liberté :

$$\begin{aligned} SS_{(a)} &= JK \sum_i (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 &= {}^tY(\pi_1 - \pi_0)Y \\ SS_{(b)} &= IK \sum_j (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 &= {}^tY(\pi_2 - \pi_0)Y \\ SS_{(ab)} &= K \sum_{ij} (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 &= {}^tY(\pi_3 - \pi_1 - \pi_2 + \pi_0)Y \\ SS_{(b/a)} &= K \sum_{ij} (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2 &= {}^tY(\pi_3 - \pi_1)Y \\ SS_{(e)} &= \sum_{ijk} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 &= {}^tY(Id_n - \pi_3)Y \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} MS_{(a)} &= \frac{1}{I-1} SS_{(a)} \\ MS_{(b)} &= \frac{1}{J-1} SS_{(b)} \\ MS_{(ab)} &= \frac{1}{(I-1)(J-1)} SS_{(ab)} \\ MS_{(b/a)} &= \frac{1}{I(J-1)} SS_{(b/a)} \\ MS_{(e)} &= \frac{1}{n-IJ} SS_{(e)} \end{aligned} \quad (12)$$

Utilisant ces notations, la résolution des systèmes (9) et (10) donnent directement les résultats qui suivent. Un exemple de construction des estimateurs des paramètres du modèle 2 est détaillé en annexe C.

### 4.2.1 Cas $\sigma_3^2 \neq 0$

Pour chacun des deux systèmes, la différence des 2 dernières lignes des systèmes (9) et (10) entraîne :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-IJ} {}^tY(Id_n - \pi_3)Y = MS_{(e)},$$

cette estimation est valable pour les modèles 2 (“ $\mu + \alpha_i + \gamma_{ij}$ ”), 4 (“ $\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$ ”), 6 (“ $a_i + \gamma_{ij}$ ”) et 8 (“ $a_i + \beta_j + \gamma_{ij}$ ”).

Pour chacun des modèles croisés 4 et 8 on obtient :

$$\hat{\sigma}_3^2 = \frac{1}{K} (MS_{(ab)} - MS_{(e)}),$$

et

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{IK} (MS_{(b)} - MS_{(ab)}),$$

ainsi que l'expression symétrique à  $\hat{\sigma}_2^2$  (pour le modèle 4 uniquement) :

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{JK}(MS_{(a)} - MS_{(ab)}).$$

Pour les modèles emboîtés 2 et 6 :

$$\hat{\sigma}_3^2 = \frac{1}{K}(MS_{(b/a)} - MS_{(e)}),$$

et pour le modèle 2 seul :

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{JK}(MS_{(a)} - MS_{(b/a)}).$$

#### 4.2.2 Cas $\sigma_3^2 = 0$

En fait pour chacun des deux systèmes, il s'agit d'abord de supprimer l'avant dernière ligne des systèmes (9) et (10). On obtient alors :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - I - J + 1} {}^t Y (\mathcal{I}d_n - \pi_2 - \pi_1 + \pi_0) Y = \frac{1}{n - I - J + 1} (SS_{(e)} + SS_{(ab)}),$$

et

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n - IK} ({}^t Y (\pi_2 - \pi_0) Y - (J - 1) \hat{\sigma}^2) = \frac{1}{IK} (MS_{(b)} - \hat{\sigma}^2).$$

Ces deux estimations sont valables pour les modèles 3 (" $\mu + \alpha_i + \beta_j$ ") et 7 (" $a_i + \beta_j$ "). De même, et uniquement pour le modèle 3, on obtient :

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n - JK} ({}^t Y (\pi_1 - \pi_0) Y - (I - 1) \hat{\sigma}^2) = \frac{1}{JK} (MS_{(a)} - \hat{\sigma}^2).$$

#### 4.2.3 Les modèles 1 et 5

D'autre part il est clair que les systèmes (9) et (10) s'appliquent aussi aux modèles à un facteur. On obtient de façon immédiate (ici  $J = 1$ )  $\hat{\sigma}^2 = MS_{(e)}$  et, pour le modèle 1,  $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{K} (MS_{(a)} - MS_{(e)})$ .

### 4.3 Remarques

Ces résultats sont très classiques : citons pour exemple [9] où les résultats des modèles 1, 2, 8 et 7 sont page 147 ; le modèle 4 étant traité à la page 127. Les modèles 3 et 6 ne sont pas traités dans cet ouvrage. Jobson ([2]) traite lui page 517 le modèle 7 avec  $K = 1$  sans donner la possibilité au lecteur de se placer dans le contexte  $K \neq 1$ . Mais c'est dans [1] page 166 et [5] page 143 que nous avons référencé une erreur sur le traitement du modèle 8 (" $a_i + \beta_j + \gamma_{ij}$ ") : les deux auteurs indiquent  $E(MS_{(b)}) = \sigma^2 + JK\sigma_2^2$  en omettant le terme  $K\sigma_3^2$ .

De plus, il est facile de voir pourquoi rechercher des estimateurs sans biais par une simple méthode de moments est effectivement dangereuse. Citons par exemple le cas de l'estimateur  $\hat{\sigma}^2$  :  $MS_{(e)}$  est toujours un estimateur sans biais de  $\sigma^2$  or ce n'est pas l'estimateur MINQUE pour l'ensemble des modèles qui vérifient " $\sigma_3^2 = 0$ ".

## 5 Annexe

### 5.1 Annexe A

On donne quelques résultats matriciels sur les matrices  $U_p^q$  et  $V_p^q$  qui s'obtiennent par des calculs élémentaires :

1.  $U_{p;l}^q \mathbb{1}_q^m = \mathbb{1}_{pql}^m$   
donc en particulier :  $U_p^q \mathbb{1}_q^m = \mathbb{1}_{pq}^m$
2.  ${}^tU_{p;l}^q \mathbb{1}_{pql}^m = pl \mathbb{1}_q^m$   
donc en particulier :  ${}^tU_p^q \mathbb{1}_{pq}^m = p \mathbb{1}_q^m$
3.  $U_p^{ql} U_q^l = U_{pq}^l$  ;  ${}^tU_p^{ql} U_{pq}^l = p U_q^l$
4.  ${}^tU_{p;l}^q U_{pq}^l = p \mathbb{1}_q^l$  ;  ${}^tU_{p;l}^q U_p^{ql} = p {}^tU_{1;l}^q$
5.  ${}^tU_{p;l}^q U_{p;l}^q = pl \mathcal{I}d_q$   
donc en particulier :  ${}^tU_p^q U_p^q = p \mathcal{I}d_q$

On en déduit alors aisément :

- $V_{p;l}^q \mathbb{1}_{pql} = pl \mathbb{1}_{pql}$ , d'après (1 + 2)
- $V_p^q U_p^q = p U_p^q$ , d'après (5)
- $V_{p;l}^q U_{pq}^l = p \mathbb{1}_{pql}^l$ , d'après (4.1 + 1)
- $V_p^{ql} U_{pq}^l = p U_{pq}^l$ , d'après (3)

### 5.2 Annexe B

Démonstration de la propriété 8 dans le cas de la famille  $F_0$ .

#### 5.2.1 Diagonalisation des matrices $V_j$

On peut remarquer que les 3 matrices  $(V_1, V_2, V_3)$  commutent : elles admettent donc une même base de vecteurs propres. On introduit alors la matrice  $W$  ; telle que  ${}^tWW = \mathcal{I}d_n$  et  $V_j = WD_j^tW$  pour  $j = 1, 2, 3$  ;  $D_j$  étant la matrice diagonale associée à  $V_j$ .

D'après l'équation (4) (  $(V_1, V_2, V_3) * \mathbb{1}_n = (JK\mathbb{1}_n, IK\mathbb{1}_n, K\mathbb{1}_n)$  ) :

$\mathbb{1}_n$  est vecteur propre commun des 3 matrices  $V_j$  ;

et le tableau (1),

*tout vecteur propre de  $V_1$  (resp.  $V_2$ ) est vecteur propre de  $V_3$  ;  
 $V_1$  et  $V_2$  n'admettent qu'un seul vecteur propre commun ( $\mathbb{1}_n$ ).*

D'autre part, chacune des matrices  $V_j$  (étant un projecteur orthogonal à une constante près) admet 2 valeurs propres dont la valeur 0 et :

*JK est valeur propre d'ordre I de  $V_1$  ;  
 IK est valeur propre d'ordre J de  $V_2$  ;  
 K est valeur propre d'ordre IJ de  $V_3$ .*

Afin de simplifier l'écriture de ces diagonalisations, on introduit l'ensemble des matrices diagonales  $D$  de  $IR^n$  noté  $\mathcal{D}_{(5)}^n$ , écrit sous la forme  $D = (a, b, c, d, e)$  et définit par :

$$D = a\mathcal{I}d_n^{(1,1)} + b\mathcal{I}d_n^{(2,I-1)} + c\mathcal{I}d_n^{(I+1,J-1)} + d\mathcal{I}d_n^{(I+J,(I-1)(J-1))} + e\mathcal{I}d_n^{(IJ+1,n-IJ)}$$

où  $\mathcal{I}d_n^{(n_1,n_2)}$  est défini comme la matrice diagonale de  $IR^n$  dont les seuls termes diagonaux non nuls et égaux à 1 sont les termes d'indices  $i$  pour  $i = n_1, \dots, n_2 + n_1 - 1$ . L'entier  $n_2$  peut être interprété comme l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée. A l'aide de cette notation les matrices  $V_j$  se diagonalisent donc sous la forme  $V_j = W D_j^t W$  avec :

$$\begin{aligned} D_1 &= (JK, JK, 0, 0, 0) \\ D_2 &= (IK, 0, IK, 0, 0) \\ D_3 &= (K, K, K, K, 0). \end{aligned} \quad (13)$$

Cette écriture suppose en particulier que la première colonne de la matrice  $W$  (ou le premier vecteur propre) est égale à  $c \cdot \mathbf{1}_n$ .

### 5.2.2 Identification de la matrice $R_{\tilde{\Gamma}-1}$

On rappelle que  $\pi_0$  est le projecteur sur le sous espace de  $IR^n$  engendré par le vecteur  $\mathbf{1}_n$  et que dans le cas de la famille  $\mathbf{F}_0$   $R_{\tilde{\Gamma}-1} = \tilde{\Gamma}^{-1}(\mathcal{I}d_n - \pi_0)$  avec  $\tilde{\Gamma} = \sum_{j=1}^4 \alpha_j^2 V_j$  (on impose  $\alpha_4^2 \neq 0$ ).

On note alors  $\tilde{W}_1 = \pi_0 W$  ;  $\tilde{W}_1$  est donc la matrice où la première colonne est identique à celle de  $W$ , tous les autres termes étant nuls et on peut alors écrire :

$$R = W D^{-1t} W - \tilde{W}_1 D^{-1t} W.$$

### 5.2.3 Identification de la matrice $S_{\tilde{\Gamma}-1} = [\text{trace}(R_{\tilde{\Gamma}-1} V_j R_{\tilde{\Gamma}-1} V_{j'})]_{(j,j'=1,\dots,4)}$

Il est immédiat de vérifier que pour  $(j, j' = 1, \dots, 4)$  :

$$\begin{aligned} \text{trace}(R_{\tilde{\Gamma}-1} V_j R_{\tilde{\Gamma}-1} V_{j'}) &= \text{trace}(D^{-1} D_j D^{-1} D_{j'}) \\ &\quad - \text{trace}(D^{-1} D_j {}^t W \tilde{W}_1 D^{-1} D_{j'}) \\ &\quad - \text{trace}(D^{-1} D_j D^{-1} D_{j'} {}^t W \tilde{W}_1) \\ &\quad + \text{trace}(D^{-1} D_j {}^t W \tilde{W}_1 D^{-1} D_{j'} {}^t W \tilde{W}_1) \end{aligned} \quad (14)$$

On peut remarquer que  ${}^t W \tilde{W}_1 = \mathcal{I}d_n^{(1,1)} = (1, 0, 0, 0, 0)$  ; les trois derniers termes de cette équation sont donc identiques et égaux à la première valeur propre de  $D^{-1} D_j D^{-1} D_{j'}$ .

Si on pose  $(D^{-1})^2 = (a, b, c, d, e)$  ; les produits  $D^{-1} D_j D^{-1} D_{j'}$  sont regroupés dans le tableau 3.

La matrice  $S$  est alors ( on pose  $(I-1)b + (J-1)c + (I-1)(J-1)d = \text{Cte}$  ) :

$$S = \begin{pmatrix} (I-1)(JK)^2b & 0 & (I-1)JK^2b & (I-1)JKb \\ 0 & (J-1)(IK)^2c & (J-1)IK^2c & (J-1)IKc \\ (I-1)JK^2b & (J-1)IK^2c & K^2(\text{Cte}) & K(\text{Cte}) \\ (I-1)JKb & (J-1)IKc & K(\text{Cte}) & \text{Cte} + (n-IJ)e \end{pmatrix}. \quad (15)$$

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$j = 1$	$(JK)^2(a, b, 0, 0, 0)$			
$j = 2$	$IKK^2(a, 0, 0, 0, 0)$	$(IK)^2(a, 0, c, 0, 0)$		
$j = 3$	$JK^2(a, b, 0, 0, 0)$	$IK^2(a, 0, c, 0, 0)$	$K^2(a, b, c, d, , 0)$	
$j = 4$	$JK(a, b, 0, 0, 0)$	$IK(a, 0, c, 0, 0)$	$K(a, b, c, d, 0)$	$(a, b, c, d, e)$

Tableau 3:  $D^{-1}D_j D^{-1}D_{j'}$  pour  $(j, j' = 1, \dots, 4)$ 

### 5.2.4 Identification du vecteur $Q_{\tilde{r}-1} = [{}^t Y R_{\tilde{r}-1} V_j R_{\tilde{r}-1} Y]_{(j=1, \dots, 4)}$

On introduit le vecteur  $Z$  tel que  $Z = {}^t W Y$ . Par un calcul du même type que l'équation (14), on vérifie que le terme générique de la matrice  $Q_{\tilde{r}-1}$  s'écrit alors  $D^{-1}D_j D^{-1}(\mathcal{I}d_n - \mathcal{I}d_n^{(1,1)})$ . On introduit d'autre part :

$$\begin{aligned}
\|Z\|_{(2)}^2 &= {}^t Z \mathcal{I}d_n^{(2, I-1)} Z \\
\|Z\|_{(3)}^2 &= {}^t Z \mathcal{I}d_n^{(I+1, J-1)} Z \\
\|Z\|_{(4)}^2 &= {}^t Z \mathcal{I}d_n^{(I+J, (I-1)(J-1))} Z \\
\|Z\|_{(5)}^2 &= {}^t Z \mathcal{I}d_n^{(IJ+1, n-IJ)} Z
\end{aligned} \tag{16}$$

A l'aide de ces notations et d'un calcul identique à celui effectué pour l'obtention de l'équation (15), on obtient :

$$Q_{\tilde{r}-1} = \begin{pmatrix} JKb\|Z\|_{(2)}^2 \\ IKc\|Z\|_{(3)}^2 \\ K(b\|Z\|_{(2)}^2 + c\|Z\|_{(3)}^2 + d\|Z\|_{(4)}^2) \\ b\|Z\|_{(2)}^2 + c\|Z\|_{(3)}^2 + d\|Z\|_{(4)}^2 + e\|Z\|_{(5)}^2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

### 5.2.5 le système " $S_{\tilde{r}-1}\underline{\sigma}^2 = Q_{\tilde{r}-1}$ " est indépendant de $(a, b, c, d, e)$

Les termes  $(a, b, c, d, e)$  étant non nuls, il est aisé de montrer à l'aide de (15) et (17) que le système " $S_{\tilde{r}-1}\underline{\sigma}^2 = Q_{\tilde{r}-1}$ " est donc équivalent à :

$$\begin{pmatrix} (I-1)JK & 0 & (I-1)K & (I-1) \\ 0 & (J-1)IK & (J-1)K & (J-1) \\ 0 & 0 & (I-1)(J-1)K & (I-1)(J-1) \\ 0 & 0 & 0 & (n-IJ) \end{pmatrix} \underline{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} \|Z\|_{(2)}^2 \\ \|Z\|_{(3)}^2 \\ \|Z\|_{(4)}^2 \\ \|Z\|_{(5)}^2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Le choix de  $(a, b, c, d, e) = (1, 1, 1, 1, 1)$  est donc possible ; ce qui termine la démonstration de la propriété (8) dans le cas de la famille  $\mathbf{F}_0$ .

## 5.3 Annexe C

On présente en détail la construction des estimateurs des paramètres du modèle 2 (" $\mu + \alpha_i + \gamma_{ij}$ "). On se trouve dans le cas d'un modèle de la famille  $\mathbf{F}_0$ , où le vecteur  $\underline{\sigma}^2 = {}^t(\sigma_1^2, \sigma_3^2, \sigma^2)$ . Le système (1) s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} (I-1)JK & (I-1)K & (I-1) \\ (I-1)JK & K(IJ-1) & (IJ-1) \\ (I-1)JK & K(IJ-1) & n-1 \end{pmatrix} \underline{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} {}^t Y(\pi_1 - \pi_0)Y \\ {}^t Y(\pi_3 - \pi_0)Y \\ {}^t Y(\mathcal{I}d_n - \pi_0)Y \end{pmatrix}. \tag{19}$$



La différence des 2 dernières lignes de ce système permet d'obtenir l'estimateur  $\hat{\sigma}^2$  :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - IJ} {}^t Y (\mathcal{I}d_n - \pi_3) Y = MS_{(e)},$$

la différence des 2 premières lignes donne l'égalité :  $IK(J-1)\hat{\sigma}_3^2 - I(J-1)\hat{\sigma}^2 = {}^t Y (\pi_3 - \pi_1) Y$ , qui s'écrit aussi  $K\hat{\sigma}_3^2 - \hat{\sigma}_1^2 = MS_{(b/a)}$  ; ce qui donne alors :

$$\hat{\sigma}_3^2 = \frac{1}{K} (MS_{(b/a)} - MS_{(e)}).$$

En dernier lieu on reprend la première ligne du système qui peut alors s'écrire :  $(I-1)JK\hat{\sigma}_1^2 + (I-1)(K\hat{\sigma}_3^2 + \hat{\sigma}^2) = {}^t Y (\pi_1 - \pi_0) Y$  ; que l'on simplifie sous la forme  $JK\hat{\sigma}_1^2 + MS_{(b/a)} = MS_{(a)}$  ; d'où :

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{JK} (MS_{(a)} - MS_{(b/a)}).$$

## Références

- [1] Dagnélie, P.. (1991), *Théorie et Méthodes Statistiques, tome II*. Duculot, J. Bruxelles.
- [2] Jobson, J.D. (1991), *Applied Multivariate Data Analysis, vol I*. Springer-Verlag, New York.
- [3] Kleffe, J. and Rao, C.R. (1988), *Estimation of variance components and applications*. Statistics and Probability, North-Holland, New-York.
- [4] Kruskal, W. (1968), When are Gauss-Markov and least squares estimators identical? A coordinate-free approach. *Ann. Math. Statistics* 39, 70-75.
- [5] Lindman, H.R. (1992), *Analysis of variance in experimental design*. Springer-Verlag, New York.
- [6] Rao, C.R. (1973), Estimation of variance and covariance components - Minque Theory. *J. Mult. Anal.* 1, 257-275.
- [7] Rao, C.R. (1973), *Linear Statistical Inference and its Applications*, 2<sup>e</sup> édition. John. Wiley, New York.
- [8] Scheffé, H. (1959), *The Analysis of Variance*. John Wiley, New York.
- [9] Searle, S.R., Casella, G. and McCulloch, C.E. (1992), *Variance Components*. John. Wiley, New York.
- [10] Searle, S.R. and Henderson, H.V. (1979), Dispersion matrices for variance components models. *J.A.S.A.* 74, 465-470
- [11] Seely, J. (1971), Quadratic subspaces and completeness. *Ann. Math. Statistics* 42, 710-721.



---

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes  
46, avenue Félix Viallet - 38031 Grenoble Cedex 1 (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine - Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes - IRISA, Campus universitaire de Beaulieu 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis - 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

---

Éditeur

INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399

